Bibliographie.

G. Misch, Der Weg in die Philosophie, VII + 418 S., Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1926.

Gar mancher Mathematiker wird in seinen „mathematischen Mussestunden“ nicht das bekannte treffliche Werk, das AHRENS unter diesem Titel herausgab, aufschlagen, sondern das Verlangen empfinden, die Klassiker der Philosophie anzuhören. Zu diesem Zweck ist das vorliegende prächtige Werk jedem Mathematiker wärmstens zu empfehlen, wenn er nicht nur lesen, sondern auch *mitarbeiten* will. Namentlich wird ihn der letzte Teil über die Begründung der Naturwissenschaft bei den Griechen interessieren; er findet hier eine „Anthologie“ aus den grossen griechischen Denkern, und gar manche Stellen werden ihn ergreifen. Dennoch ist das Buch nicht als eine blosse „Auslese“ zu betrachten, da man überall den Geist des Verfassers empfindet, obwohl er seine eigenen Erläuterungen oft zurücktreten lässt.

A. H.

O. Neugebauer, Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung, 45 S. in 4⁰ und 6 Tafeln, Berlin, J. Springer, 1926.

Das erste Kapitel der Schrift behandelt die begrifflichen Grundlagen der ägyptischen Mathematik, das zweite Kapitel erbringt die Aufklärung der ägyptischen Bruchrechnung, insbesondere die der Stammbruch-Zerlegung, mit der sich der erste Teil des Papyrus Rhind bescheftigt.

Eine Erkenntnis, die ein Mathematiker — ohne spezielles historisches Gefühl — aus der sehr gründlichen Darstellung schöpfen kann, ist dass das Primitivste nicht immer das Einfachste ist.

B. von Kerékjártó.

H. Falckenberg, Elementare Reihenlehre (Sammlung Göschen Nr. 943), 136 S., Berlin u. Leipzig, Walter de Gruyter & Co., 1926.

Nach einleitenden Abschnitten über reelle Zahlen und über endliche Reihen (binomischer und polynomischer Lehrsatz, arithmetische Reihen erster und höherer Ordnung, geometrische Reihe) wird die Theorie der unendlichen Reihen recht ausführlich behandelt und auf einige wichtige Beispiele angewandt. Die Darstellung ist, dem Titel entsprechend, möglichst elementar; die Elemente der Differential- und Integralrechnung werden nur an einigen Stellen gebraucht, um rascher das Ziel zu erreichen.

Die irrationalen Zahlen werden durch DEDEKINDsche Schnitte definiert; an dem Beispiele der Addition wird angedeutet, wie auf Grund dieser Definition die Rechenoperationen zu erklären sind. Der binomische Lehrsatz wird durch Ausrechnen des Produktes $(1+a_1)\ldots(1+a_n)$, der polynomische Lehrsatz hingegen direkt durch eine kombinatorische Betrachtung abgeleitet. Nach Herleitung einiger Formeln für höhere arithmetische Reihen folgt die Summenformel der endlichen geometrischen Reihe, als Vorbereitung zur Theorie der unendlichen Reihen. Es folgen die wichtigsten Definitionen und

Sätze über Zahlenfolgen, durch das Beispiel der wichtigen Folge $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ beleuchtet; alsdann die Definitionen über unendliche Reihen, sowie das allgemeine Konvergenzkriterium. Das Kapitel über Reihen mit positiven Gliedern ist ziemlich ausführlich; nach allgemeinen Sätzen über Teilreihen, Umordnung usw. behandelt der Verfasser die Vergleichungskriterien, die CAUCHYschen Kriterien, das RAABEsche, das logarithmische und das GAUSSsche Kriterium der Konvergenz und Divergenz. Aus den Sätzen über Reihen mit positiven Gliedern ergeben sich nun im nächsten Kapitel die Sätze über absolut konvergente Reihen sehr leicht; es wird auch der Satz über die Multiplikation einer konvergenten Reihe mit einer absolut konvergenten bewiesen.

Als Anwendung folgt nun die Bestimmung des Konvergenzbereiches der Potenzreihen, der Identitätssatz und die Differentiation der Potenzreihen. In den letzten Kapiteln werden einige wichtige Potenzreihen: die binomische, hypergeometrische, exponentielle, Kosinus-, Sinus- und Tangensreihe, die logarithmischen und zyklometrischen Reihen behandelt. Die Identifizierung der Summen der Reihen mit den betreffenden elementaren Funktionen erfolgt zum Teil durch den Nachweis, dass die Summen der Reihen Funktionalgleichungen genügen, die die betreffenden elementaren Funktionen charaktisieren, zum Teil aber durch Berufung auf den Identitäts-, Differentiations-, bzw. Multiplikationssatz der Potenzreihen. Es ist Schade, dass bei der Identifizierung der Sinus- bzw. Kosinusfunktion mit der Summe der Sinus- bzw. Kosinusreihe der Verfasser den sehr lehrreichen elementaren Beweis durch eine unnötige Heranziehung der Integralrechnung zu Ende führt.

Das Buch wird hoffentlich jedem, der eine erste Orientierung in der Reihenlehre erlangen will, vom Nutzen sein.

L. Kalmár.

Hk. de Vries, Die vierte Dimension, deutsch von R. STRUIK (Wissenschaft und Hypothese XXIX), IX + 176 S., Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1926.

Das vorliegende Buch des bekannten holländischen Gelehrten hat den Zweck, eine allgemeine Einführung in die Gedankenwelt dem mehrdimensionalen und der nicht-euklidischen Geometrien zu geben, die den angehenden Mathematikern zur ersten Orientierung und den Studenten der modernen Physik zur Aneignung der wichtigsten Ideen und Resultate dieser Theorien dienen soll. Dem Verfasser ist es gelungen, diesen Zweck vollständig dadurch zu erreichen, dass er die mehrdimensionalen und die nicht-euklidischen Geometrien ohne Formeln und nur durch innere Klärung und Auseinandersetzung der Grundbegriffe behandelt. — Der erste Teil behandelt die euklidische mehrdimensionale Geometrie; neben dem didaktischen Gesichtspunkt wird auch dem historischen genügend Rechnung getragen. Der Grundgedanke seiner Behandlung ist, die zwischen der zwei- und der dreidimensionalen Geometrie bestehenden Beziehungen dermassen auseinanderzusetzen und auf ihre wesentlichen Elemente zurückzuführen, dass dieselben Beziehungen den Übergang von drei auf vier Dimensionen ermöglichen. Dieses Prinzip ist freilich nicht neu — es spielt schon in den populären Vorlesungen von POINCARÉ eine vorzügliche Rolle — es wird aber in der musterhaften Behandlung von HK. DE VRIES so konsequent durchgeführt, dass man dadurch eine wahrhafte *Anschauung* im vierdimensionalen Raum erhält. Der in diesem Teil gegebene Stoff ist reichhaltig, umfasst sozusagen alle wesentlichen Resultate; er erbringt für vier Dimensionen auch die Aufzählung der regelmässigen Polytope. — Der zweite Teil behandelt die nich-euklidischen ebenen Geometrien wieder auf eine Weise, die die didaktische und die geschichtliche Entwicklung vor Augen hält. Die Betrachtung ist auch hier gut gelungen und der dargestellte Stoff sehr vollständig.

Als besonderen Vorteil des Werkes möchte ich den schon oben erwähnten Umstand hervorheben, dass die Geometrie auf eine durchaus anschauliche Weise — ohne den komplizierten Apparat des Mathematikers — dargestellt wird, wodurch das Buch auch für solche, die das Gebiet schon kennen, eine sehr instruktive und immer interessante Lektüre bietet.

B. von Kerékjártó.

L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II: Moderne Funktionentheorie, VII + 366 S., Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1927.

Sechs Jahre nach dem Erscheinen des ersten Bandes liegt nunmehr erfreulicherweise auch der zweite Band des BIEBERBACHschen Werkes vor. Nachdem im ersten Bande die Fundamente gelegt und die klassischen Gegenstände der Theorie erledigt wurden, gelangen im zweiten Bande die Ergebnisse der neueren und neuesten Forschung zur Darstellung. Beispielsweise findet man in beiden Bänden je einen Abschnitt über analytische Fortsetzung; im ersten Bande handelt es sich um die grundlegenden Begriffsbildungen (analytisches Gebilde) und um klassische Sätze (Spiegelungsprinzip und Folgerungen) — der entsprechende Abschnitt im zweiten Bande bringt die neueren, überraschend schönen Sätze vorwiegend potenzreihentheoretischen Charakters. Dabei werden die Entwicklungen bis zu den neuesten Forschungsergebnissen geführt (Sätze von PÓLYA und CARLSON über Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten, Satz von SZEGŐ über Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten u. s. w.); auch bei der Darstellung von älteren Resultaten werden die durch die neuesten Forschungen ermöglichten Vereinfachungen technischer und prinzipieller Art berücksichtigt (OSTROWSKIscher Beweis des HADAMARDschen Lückensatzes). Ähnlich verhält es sich mit all den acht Abschnitten, in welche Herr BIEBERBACH den reichen Inhalt des vorliegenden Bandes gegliedert hat (Konforme Abbildung — Die elliptische Modulfunktion — Beschränkte Funktionen — Uniformisierung — Der PICARDsche Satz — Ganze Funktionen — Analytische Fortsetzung — Die RIEMANNsche Zetafunktion). Überall findet man, dass nach gründlicher Vorbereitung im ersten Bande der Lernende nunmehr in unmittelbare Fühlung mit der lebendigen Wissenschaft gesetzt wird; er lernt dabei nicht nur eine Fülle der modernsten Ergebnisse kennen, er lernt auch die Handhabung der weittragendsten und zugleich einfachsten Methoden.

Beim ausserordentlichen Reichtum der komplexen Funktionentheorie an

Ergebnissen, Problemen, Methoden und Anwendungen konnte der Verfasser begreiflicherweise nicht nach Vollständigkeit streben. Was er in seinem Werke bietet, geht trotzdem ganz wesentlich über die gewohnten Rahmen hinaus, und zwar nicht nur der Breite, sondern auch der Tiefe nach, wie bereits aus den obigen Bemerkungen über den die *analytische Fortsetzung* behandelnden Abschnitt zu ersehen ist. Es ist nicht möglich, hier über den Reichtum des behandelten Stoffes und über die unzähligen Feinheiten in den Einzelheiten der Darstellung auch nur annähernd eine Idee zu geben; überdies besitzt das Buch einen Vorzug, der eben nur beim Studium desselben hervortritt, nämlich die lebhafte, stets fesselnde, leicht fliessende und trotzdem im Grossen und im Kleinen fein durchdachte Darstellung. Kurz: ein schönes Buch, welches die beiden, im Titel und Untertitel desselben steckenden Versprechen, ein *Lehrbuch* und zugleich *modern* zu sein, in glücklichster Weise einlöst. Es werde noch bemerkt, dass das Buch auch dem Kenner viel Neues und Interessantes bringt, und zwar nicht nur an Feinheiten im Kleinen und an Originalität der Einstellungen im Grossen; in der Tat enthält das Buch, zerstreut auf fast alle Abschnitte desselben, eine Reihe von bedeutenden, bisher unveröffentlichten persönlichen Beiträgen des Verfassers.

In einem Buche von derart reichem und mannigfaltigem Inhalte gibt es natürlich auch Stellen, wo man mit dem vom Verfasser eingeschlagenen Wege nicht ganz einverstanden sein oder wo man eine schärfere Fassung der Begriffe und der Ausdrucksweise wünschen wird. Beispielsweise scheint dem Referenten die Behandlung der topologischen Fragen in den Abschnitten über konforme Abbildung und Uniformisierung nicht diejenige Einfachheit und Übersichtlichkeit darzubieten, die man mit Rücksicht auf die gegenwärtige hohe Entwicklung der Topologie erwarten würde. Ferner hat Referent den Eindruck, dass ein auf dem Begriffe der universellen Überlagerungsfläche beruhender, die funktionentheoretischen Methoden von Koebe, Bieberbach, Carathéodory mit den topologischen Methoden von Weyl zweckmässig vereinigender Beweisgang zu einer einfacheren Herleitung des Hauptsatzes der Uniformisierungstheorie führen könnte, wie die Bieberbachsche *Methode der schrittweisen Uniformisierung*. Es handelt sich hier aber offenbar um Dinge, bei deren Beurteilung die subjektive Einstellung massgebend ist.

Tibor Radó.

Nicomachus of Gerasa, Introduction to Arithmetic, translated by Martin Luther d'Ooge, with studies in greek arithmetic by Frank Egleston Robbins and Louis Charles Karpinski (University of Michigan Studies, Humanistical Series vol. XVI.), 318 p. in 4⁰, New York, The Macmillan Co., 1926.

The text of Nicomachus on arithmetic has a very interesting content not only from historical but also from mathematical point of view. The additional studies of the editors and the careful notes bring it up to date and make it easy to understand. The whole book is very interesting to read and very valuable for the purpose to obtain a wide knowledge on greek arithmetic.

B. de Kerékjártó.

Charles Jordan, Statistique mathématique, avec une préface de M. d'Ocagne. VIII + 344 pages, Paris, Gauthier-Villars et C[ie], 1927.

Ce livre excellent est écrit à l'usage du statisticien qui désire tirer des chiffres tous les renseignements qu'ils comportent. L'auteur qui professe ce sujet à la *Faculté d'Économie Politique de l'Université de Budapest*, fait précéder l'exposé des méthodes mathématiques de la Statistique par celui des notions et résultats indispensables de Calcul des différences finies, d'Analyse, de Calcul des probabilités, d'Interpolation et de Calcul numérique. Pour citer un exemple parmi les contributions personnelles de l'auteur, mentionnons les polynomes G propres au développement des fonctions qui ne sont définies que pour des valeurs isolées (mais équidistantes) de la variable. Ces polynomes s'obtiennent par dérivations successives en partant de la fonction $\frac{x^{\nu}e^{-x}}{\nu!}$; leurs avantages tiennent à certaines relations d'orthogonalité où interviennent non pas des intégrales mais des sommes.

Une foule de détails et de points de vue nouveaux frappent l'attention du lecteur qui regrette en maints endroits que l'auteur ait cru devoir se borner à l'indication des formules au lieu d'insister sur leur enchaînement (par exemple, pour les polynomes introduits sous le nom de „polynomes de Bernoulli de seconde espèce," pour la formule sommatoire de Maclaurin-Euler dont il avait donné la démonstration la plus naturelle, etc.). Mais peut-être cette concision lui était-elle imposée par la richesse des matières qu'il a su condenser dans un volume de 344 pages, consacré surtout aux notions et méthodes de la Statistique mathématique proprement dite (classifications, moyennes, représentation et ajustement des fonctions de fréquence, principes des moments et des moindres carrés, corrélation). Il use franchement du calcul des probabilités et soumet à un examen critique les méthodes pratiquées par les statisticiens. Il compare notamment les applications du principe des moments et du principe des moindres carrés (sans dissimuler ses péférences pour ce dernier) et expose en détail les méthodes de Kapteyn, de Pearson, de Sheppard, ainsi qu'une méthode nouvelle d'ajustement.

L'ouvrage contient un grand nombre d'exemples numériques qui montrent chez l'auteur une heureuse alliance de l'intérêt théorique et des préoccupations pratiques.

Adolphe Szücs.

J. L. Coolidge, Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung, deutsche Ausgabe von Dr. F. M. Urban (Sammlung mathematisch-physikalischer Lehrbücher, herausgegeben von E. Trefftz), IX + 212 S., Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1927.

Wirft man einen Blick auf die Lehrbücher-Literatur der Wahrscheinlichkeitsrechnung, so kann man darin in scharfer Weise zwei Kategorien unterscheiden. Die eine Kategorie stellt sich zur Aufgabe, die Wahrscheinlichkeitsrechnung an Anwendungen und geschickt gewählten Aufgaben zu erläutern; die mathematischen Theoreme dieser Disziplin werden daher rasch erledigt, wobei oft auf die mathematische Strenge verzichtet wird, um eine möglichst grosse Anzahl von Anwendungen darlegen zu können. Die zweite Kategorie der Lehrbücher — ich nenne die Werke von Markoff und Castelnuovo — legen gerade auf die der Theorie zu Grunde liegenden mathematischen Theoreme das Hauptgewicht; sie sind in erster Reihe für den Mathematiker geschrieben, wobei den Anwendungen tatsächlich nur die Rolle von Beispielen zur allgemeinen Theorie zukommt.

Das vorliegende Büchlein gehört zur ersten Kategorie; sie verwirklicht aber ihr Ziel in ausgezeichneter Weise. Durch elementare und jedem Studenten der Mathematik zugängliche Behandlungsweise des Stoffes (selbst die Stirlingsche Formel wird nicht als bekannt vorausgesetzt), durch die glücklich getroffene Auswahl der Anwendungen (es wird neben den üblichen Anwendungen auch die kinetische Gastheorie und die Lebensversicherung behandelt), endlich durch den verhältnissmässig kleinen Umfang des Buches erreicht der Verfasser, dass sein Werk zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung besonders geeignet wird und ohne Zweifel viel dazu beitragen wird, die Kenntnis dieser Disziplin in weiten Kreisen zu verbreiten.

A. H.

A. Fraenkel, Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre (Wissenschaft und Hypothese XXXI), X + 182 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1927.

Das neue Buch Fraenkels zeichnet sich durch dieselben Vorzüge aus, die wir in der Besprechung (im Bd. **2** *dieser Acta*) seiner *Einleitung in die Mengenlehre* gerühmt haben. Diese sind u. A.: die klare, leichtverständliche Sprache und die Unvoreingenommenheit, mit der die verschiedenen, oft einander widersprechenden neuen Theorien dargestellt werden.

Im neuen Buch erscheint natürlich das Cantorsche Tatsachenmaterial in einer sehr gedrängten Auswahl um gleich am Anfang zu den Antinomien und ihren Wirkungen übergehen zu können.

Der Tatsache entsprechend, dass man die nicht-praedikativen Begriffsbildungen ablehnen kann, ohne deshalb Intuitionist zu sein (dieser Ansicht hat sich jetzt Verf. angeschlossen), wird uerst dieser Russell-Poincaréscher Standpunkt erläutert und hierauf erst werden die wesentlichen Punkte des Brouwerschen Intuitionismus behandelt: Ablehnung des Prinzips des ausgeschlossenen Dritten und, in Zusammenhang hiermit, Verbot der schrankenlosen Verwendung der Begriffe „alle" und „es gibt." (Es ist wohl nur ein sprachlicher Irrtum, wenn Verf. auf S. 40. dem deutschen „es gibt" das englische „any" entsprechen lässt).

Zwei Drittel des Buches behandeln, auf der Zermeloschen Grundlegung basierend, die Axiomatisierung der Mengenlehre. Dies entspricht der festen Überzeugung des Verfassers, dass dies die einzige Methode zur Lösung der behandelten Probleme darstellt. Dabei werden auch manche Einwände erwähnt — wenn auch nicht voll berücksichtigt —, welche die grenzenlose Anwendbarkeit der axiomatischen Methode illusorisch zu machen scheinen. Von diesen

Einwänden wollen wir besonders auf das merkwürdige Resultat von SKOLEM hinweisen, laut welchem „der Begriff der Mächtigkeit beim axiomatischen Vorgehen notwendig relativiert wird."

Am ausführlichsten behandelt Verf. das Aussonderungs- und das Auswahlaxiom. Es is zu bedauern, dass er ersteres (Axiom V') nicht einfacher aussprechen und von seiner (wenigstens scheinbar) zirkelhaften Formulierung befreien vermochte.

Bei der Frage der Widerspruchslosigkeit des Axiomensystems kommt Verf. dazu, von den neuen Untersuchungen HILBERTS zu sprechen. Er stellt die Frage, ob das HILBERTsche Unternehmen — der Widerspruchslosigkeitsbeweis für die Mathematik — „seiner Natur nach überhaupt durchführbar ist?"

Das Buch schliesst mit der Untersuchung der Unabhängigkeit des Auswahlaxioms. Hier wird die berühmte unendliche Menge der Strumpfpaaren herangezogen. (Dieses pittoreske Beispiel stammt jedoch nicht von POINCARÉ, wie auf S. 86 behauptet wird, sondern von RUSSELL).

Jeder, der sich damit nicht zufrieden stellt, die Berechtigung einer mathematischen Untersuchung nur durch sein aesthetisches Gefühl oder vom Standpunkte der Anwendbarkeit beurteilen zu können, wird dem Verfasser dankbar sein, diese brennendsten Probleme der Wissenschaft in klarer Weise besprochen und hierdurch auch der Lösung gewiss näher gebracht zu haben.

Dénes König.